

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 3

FSV UK, ZS 2024-25

Termín číslo 3, 29. 1. 2025

1. Vyšetřete konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + n}{n^3 + 1}$$

(12 bodů)

2. V závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$ určete, zda matice je PD, ND, PSD, NSD, nebo ID.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} x & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(12 bodů)

3. Napište Taylorovy polynomy čtvrtého řádu pro funkce

$$f(x) = \cos(\sin(x)) - e^{\frac{1}{2}x^2} + x^2, \quad g(x) = \sqrt{\cos(x) - x^2} - \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{4}x^2$$

v bodě 0 a s jejich pomocí pak spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

(13 bodů)

4. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v $\mathbb{R}^2$, kde

$$f(x, y) = \sin(2y) \cdot \cos(x).$$

(13 bodů)

Výsledky a návody

1. Řada je konvergentní podle Leibnizova kritéria.

2. Matice je pozitivně semidefinitní, právě když $x = 2$. Matice je indefinitní, právě když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

3. $T_4^{f,0}(x) = \frac{1}{12}x^4$; $T_4^{g,0}(x) = -\frac{13}{96}x^4$; limita vyjde $-\frac{8}{13}$

4. Body, kde je gradient f nulový: $[k\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}n\pi]$, $[\frac{1}{2}\pi + m\pi, \frac{1}{2}l\pi]$, $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$;
body lokálního maxima: $[k\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}n\pi]$, $k, n \in \mathbb{Z}$, $k + n$ je sudé;
body lokálního minima: $[k\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}n\pi]$, $k, n \in \mathbb{Z}$, $k + n$ je liché